

§1. Сложение многочленов

Примеры и комментарии

1. Посмотрите на многочлены

$$A = -x^4 + 2x^2 - 3$$

$$B = x^3 + x^2 + x$$

Они записаны в *стандартном виде*.

Степени их равны 4 и 3.

Старшие члены: $-x^4$ и x^3 .

Старшие коэффициенты: -1 и 1 .

Свободные члены: -3 и 0 .

2. Запись многочлена

$$2x^3 - x^4 - 3 + x^3 + 1$$

не является стандартной. Сложим его подобные члены:

$$(2x^3 + x^3) - x^4 + (-3 + 1) = 3x^3 - x^4 - 2$$

и перепишем их в порядке убывания их степеней:

$$-x^4 + 3x^3 - 2.$$

Мы пришли к многочлену стандартного вида.

3. Посмотрите на многочлен

$$A = a^3 + a^2b - b^3 + 2ab + a + b - 3$$

Он записан в стандартном виде. Многочлены

$$A_3 = a^3 + a^2b - b^3$$

$$A_2 = 2ab$$

$$A_1 = a + b$$

$$A_0 = -3$$

— это его *однородные составляющие*, т. е. суммы одночленов одной и той же степени.

Степень многочлена A равна 3.

Свободный член равен -3 .

Старшим членом выбран одночлен a^3 .

Многочлен — это выражение, являющееся суммой одночленов.

Многочлен имеет *стандартный вид*, если:

- он записан в виде суммы одночленов стандартного вида;
- среди одночленов нет подобных;
- одночлены более высокой степени стоят левее одночленов более низкой степени.

Для многочленов с одной буквой стандартный вид определяется однозначно. Действительно, в такой многочлен после приведения подобных членов может входить не более одного одночлена данной степени. Расположив эти одночлены в порядке убывания степеней, мы получим однозначно определенный многочлен стандартного вида.

Если многочлен составлен с помощью нескольких букв, то его стандартный вид можно определить по-разному.

Прежде всего, в нем не должно быть подобных одночленов. Далее мы объединим в группы одночлены одной и той же степени — в отличие от одночленов с одной буквой их может быть несколько. Наконец, группы одночленов более высокой степени нужно расположить левее групп одночленов более низкой степени. Это однозначно определит расположение групп одночленов одной и той же степени в убывающем порядке. Располагать же одночлены внутри каждой такой группы можно по-разному. Обычно при этом учитывают алфавитный порядок букв.

Степень многочлена — это наивысшая степень одночлена, входящего в этот многочлен.

Однородный многочлен — это многочлен, у которого все одночлены имеют одинаковую степень.

Свободный член многочлена — это его одночлен нулевой степени, т. е. входящее в него число. Если такого одночлена нет в стандартной записи многочлена, то считается, что он равен нулю.

Старший член многочлена — это его одночлен наивысшей степени. Для многочленов с одной буквой старший член определен однозначно. Если букв более одной, нужно специально договариваться о выборе старшего члена.

Старший коэффициент — это коэффициент при старшем члене.

Презентации

- Стандартный вид многочлена
- Словарь и примеры

Демонстрации

- Стандартный вид многочлена с одной буквой
- Стандартный вид многочлена с несколькими буквами
- Сложение многочленов

СУММА МНОГОЧЛЕНОВ

Сумма (разность) двух многочленов — это выражение, получающееся соединением двух многочленов знаком сложения (вычитания).

$A + B$ — сумма многочленов

$A - B$ — разность многочленов

Когда говорят «сложить (или вычесть) многочлены», то это не значит, что их нужно просто соединить плюсом или минусом. При этом имеют в виду, что нужно в записанной сумме (разности) привести подобные члены и записать результат в стандартном виде.

При сложении (вычитании) многочленов складываются (вычитаются) коэффициенты при подобных слагаемых.

Как меняется степень при сложении многочленов?

Примеры

$$1. (x^2 - 1) + (x^3 + x^2 + 2) = x^3 + 2x^2 + 1$$

Складывали многочлены *разных* степеней. В этом случае степень суммы равна наибольшей из степеней слагаемых.

$$2. (x^2 - 1) + (2x^2 - x + 2) = 3x^2 - x + 1$$

Складывали многочлены *одинаковых* степеней. Их старшие члены подобны, но их *сумма отлична от нуля*. В этом случае степень суммы сохранилась.

$$3. (x^2 - 1) + (-x^2 + x + 2) = x + 2$$

Складывали многочлены *одинаковых* степеней, но сумма их старших членов оказалась *равной нулю*. В этом случае степень суммы уменьшилась.

Примеры и комментарии

1. Сложение многочленов с одной буквой похоже на сложение строчек из их коэффициентов.

$$A = 4x^3 - x^2 + 9x$$

$$B = 2x^3 + 2x^2 - x + 5$$

Строчки из коэффициентов:

$$A \quad (4, -1, 9, 0)$$

$$B \quad (2, 2, -1, 5)$$

Сумма строк:

$$(6, 1, 8, 5)$$

Сумма многочленов:

$$A + B = 6x^3 + x^2 + 8x + 5$$

2. Надо быть внимательным, складывая многочлены разных степеней.

$$A = 2x - 3$$

$$B = x^2 + x$$

Строчки должны иметь одинаковую длину:

$$A \quad (0, 2, -3)$$

$$B \quad (1, 1, 0)$$

Сумма строк:

$$(1, 3, -3)$$

$$A + B = x^2 + 3x - 3$$

3. При сложении многочленов с несколькими буквами надо уметь быстро находить подобные слагаемые. Это сделать проще, если приучиться записывать слагаемые одной и той же степени в определенном порядке.

Например, многочлен $2bc - b^2 + ab + a^2 - 3ac + 2c^2$ лучше записать в таком порядке: $a^2 - b^2 + 2c^2 + ab - 3ac + 2bc$.

Сначала записаны квадраты букв в алфавитном порядке, затем их попарные произведения. Эти произведения перечислены так: сначала взята первая буква a и она умножена по порядку на следующие: ab и ac . Затем взята следующая буква b и умножена на следующие (в данном случае за b следует только c): bc .

ПРОВЕРЬ СЕБЯ

- Дан многочлен $-x^3 + 3x - 5$. Чему равна его степень? Каковы его старший коэффициент и свободный член?
- Может ли сумма двух многочленов третьей степени стать многочленом второй степени? Приведите примеры.
- Разбейте многочлен $x^4 + y^3 + 3xy + y + x^2y^2 + 1 + x^2 + xy^2 + 2x$ на однородные составляющие.